Idsteiner Mittwochsgesellschaft

Ist Gott ein Mathematiker?

oder

Die Berechenbarkeit der Welt

Dr. Martin Hensel

18. Juni 2014 und 9. Juli 2014

www.idsteiner-mittwochsgesellschaft.de

Inhaltsverzeichnis

1 Was meint „Berechenbarkeit der Welt"?

In diesem Text geht es um die Frage, wie weit Mathematik als „Sprache der Wissenschaft" trägt, um damit die Wirklichkeit zu beschreiben. Eng mit der Frage nach dem „wie weit" verknüpft ist die Frage nach dem „wieso überhaupt". Warum taugt Mathematik dazu, die Welt zu beschreiben? Woher kommt die enorme Erklärungsmacht der Mathematik? Wie ist das Verhältnis von Mathematik und Wirklichkeit? Wird Mathematik erfunden oder wird sie entdeckt?

Wird Mathematik erfunden – der formalistische Standpunkt - und ist somit ein Produkt des menschlichen Geistes, so stellt sich sofort die Frage, wieso sie so unglaublich erfolgreich in der Naturbeschreibung ist. Der menschliche Geist wurde in Jahrmillionen dauernder Evolution durch die täglichen Herausforderungen der Umwelt geformt. Aber gerade in Bereichen der Mikro- und Makrophysik, die weit außerhalb unseres evolutionären Erfahrungshorizonts liegen, ist Mathematik ein zumindest unverzichtbares wenn nicht sogar unfehlbares Instrument zum Erkenntnisgewinn. Gerade in der Quantenmechanik widersprechen die physikalischen Erkenntnisse dem „gesunden Menschenverstand" – trotzdem funktioniert dort Mathematik und ist mit dem Versagen des gesunden Menschenverstands sogar das verbleibende primäre Erkenntnisinstrument. Den formalistischen Standpunkt hat der deutsche Mathematiker Kronecker sehr prägnant formuliert: „Gott hat die natürlichen Zahlen gemacht, der Rest ist Menschenwerk" (vgl. [Liv], Kap. 1).

Wird Mathematik dagegen entdeckt – der Platonische Standpunkt - so muss erklärt werden, wie und wo außerhalb der menschlichen Kognition sie niedergelegt ist. Ein moderner Vertreter des Platonismus ist Roger Penrose ([Pen]), der die drei Welten der bewussten Wahrnehmung, der physikalischen Objekte und der reinen Ideen sieht. In letzterer verortet er die Mathematik.

Selbst mehr als zweieinhalb Jahrtausende nach Pythagoras sind wir noch weit von einer Antwort auf die Frage „erfunden oder entdeckt" entfernt – und es zeichnet sich wie immer bei „großen" Fragen ab, dass es kein scharfes „entweder - oder" gibt. Entsprechend wird der vorliegende Text bestenfalls verschiedene Aspekte und Standpunkte beleuchten und Fragen aufwerfen können.

Kapitel 2 zeichnet ganz kurz die historische Entwicklung der Mathematik mit Fokus auf der prinzipiellen Frage „erfunden oder entdeckt" nach. Es ist sehr eng an das Buch „Ist Gott ein Mathematiker?" von Livio [Liv] angelegt.

Kapitel 3 betrachtet einige grundsätzliche Aspekte der Anwendung von Mathematik auf den verschiedenen Ebenen der Wirklichkeit, unabhängig von der Frage „erfunden oder entdeckt".

2 Kurzer historischer Abriss

2.1 Antike

Die Grundlagen für den platonischen Standpunkt legten tatsächlich schon die Pythagoreer rund 150 Jahre vor Platon. Sie nahmen Zahlen als reale Objekte an. Einer der Kernsätze ihrer Philosophie war „Die Welt ist Zahl“. Sie etablierten den mathematischen Beweis als rein auf logischen Schlussfolgerungen basierte Ableitung mathematischer Aussagen aus einer Menge von grundlegenden Axiomen und sie nahmen die Existenz allgemeingültiger mathematischer Gesetze an. Zu ihrem Entsetzen entdeckten die Pythagoreer aber auch, dass die Diagonale des Einheitsquadrats nicht kommensurabel (mit dem selben Maßstab messbar) zu den Seiten ist – weil sie eine irrationale Zahl und damit nicht als Bruch darstellbar ist. Dem Entdecker dieser Tatsache sollen sie schon zu Lebzeiten ein Grabmal (als Zeichen, dass er sein Lebensrecht verwirkt hat) gesetzt ([Liv], S. 41) oder ihn sogar ins Meer geworfen haben ([Heu], S. 29).

Für Platon hatte Mathematik eine ebenso grundlegende Rolle wie für die Pythagoreer. In seinem Dialog „Der Staat“ stellt er für den idealen Herrscher einen Ausbildungsplan zusammen, der nicht weniger als zehn Jahre Mathematikunterricht vorsieht. Im berühmten Höhlengleichnis formuliert Platon schließlich seine Welt der Ideen. Insbesondere mathematische Objekte und Aussagen aller Art gehören in diese Sphäre, haben also eine vom Menschen und jedem konkreten Objekt der realen Welt unabhängige Existenz ([Liv], Kap. 2).

Für Archimedes waren seine zahlreichen Erfindungen und Konstruktionen nur Abfallprodukte der eigentlich bedeutsamen abstrakten Mathematik im Sinne Platons. Er löste sich aber bereits von Platons rigoroser Vorstellung, nur abstrakte Beweise auf axiomatischer Basis hätten Gültigkeit und ließ auch praktische Überlegungen und geometrische Konstruktionen als Beweise gelten.

2.2 Beginnende Neuzeit

Bis zum Ende des Mittelalters dominierten die aristotelische Philosophie und Naturwissenschaft mit ihrem teleologischen Erklärungsansatz die Wissenschaften. Für die Aristoteliker hatte jede Wissenschaft ihre eigenen Methoden und Erklärungsansätze. Erst von Galileo Galilei wurden an der Wende vom 16. zum 17. Jahrhundert die experimentelle Physik „erfunden“ und die Ergebnisse mathematisch analysiert und erklärt. Von Galilei stammt auch der berühmte Ausspruch, dass das Buch des Universums in der Sprache der Mathematik geschrieben ist Er stellte damit im Gegensatz zum aristotelischen Methodenpluralismus die Wissenschaften auf ein einheitlich mathematisches Fundament ([Liv], Kap. 3).

Für Newton, der für die Berechnung der Planetenbahnen aus seinem Gravitationsgesetz die Infinitesimalrechnung entwickelte, war Gott Mathematiker, der die physikalische Welt so schuf, dass sie mathematischen Gesetzen gehorcht. Für Descartes war Gott darüber hinaus auch noch Schöpfer der Mathematik selbst. Descartes gelang durch die Einführung seines heute sogenannten „kartesischen“ Koordinatensystems aus senkrecht aufeinander stehenden x- und y-Achsen die Verbindung zwischen Arithmetik und Geometrie, weil sich nun geometrische Gebilde – Kreise, Geraden, etc. – durch Funktionen beschreiben ließen. Der Kreis mit Radius r um den Nullpunkt etwa war die Menge aller Punkte in der Ebene, deren x- und y-Koordinaten die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ erfüllen ([Liv], Kap. 4).

Laplace schließlich erdachte ein durch und durch deterministisches, von mathematischen Gesetzen gesteuertes Uhrwerk-Universum. Wenn man zu einem festen Zeitpunkt die Positionen und Geschwindigkeiten aller Objekte im Universum kenne, lägen Zukunft und Vergangenheit gleichermaßen eindeutig fest – ganz im Sinne der newtonschen Planetenbewegung, für die genau das zutrifft. Im Gegensatz zu Newton und Descartes war Laplace kein religiöser Mensch. Als er Napoleon sein Universum erklärte, sagte dieser, er finde nirgends in Laplace‘ Werk einen Hinweis auf den Schöpfer dieses Universums - also auf Gott. In einer berühmten Szene soll Laplace voller Selbstbewusstsein entgegnet haben, er bedürfe dieser Hypothese nicht ([Liv], Kap. 5).

Im England des 17. Jahrhunderts entstand die Statistik. Es wurde entdeckt, dass sich Aufzeichnungen über Sterbedaten, Körpergröße von Menschen etc. statistisch einheitlich darstellen. Es war bereits bekannt, dass sich bei Messung einer feststehenden physikalischen Größe – etwa einer Länge oder eines Gewichts – die tatsächlich gefundenen Werte aufgrund zufälliger kleiner Messfehler gemäß einer gaußschen Normalverteilung um den „richtigen“ Wert häufen. Diese Normalverteilung wurde nun auch bei z.B. der Körpergröße entdeckt. Das führte zunächst zu der Annahme, es gäbe eine „wahre“ Körpergröße und Abweichungen davon seien analog zu Messfehlern. Wesentlich war aber die Erkenntnis, dass Mathematik sogar zur Beschreibung biologischer und gesellschaftlicher Erscheinungen eignete. Der Gültigkeitsbe-reich der Mathematik hatte sich weit über den naturwissenschaftlichen Rahmen hinaus ausgedehnt. Das stützte die bis dahin ohnehin weitgehend unhinterfragte Annahme, Mathematik sei gottgegeben und werde also entdeckt ([Liv], Kap. 5). Die „Mathematik-Gläubigkeit“ ging sogar so weit, dass Spinoza seine Ethik methodisch analog zu Euklids Elementen aufbaute, indem er grundsätzliche Axiome formulierte und daraus in scheinbar mathematischer Strenge die Ethik entwickelte.

Einen schweren Schlag erhielt der Platonische Standpunkt mit der Entdeckung nicht-euklidischer Geometrien im 18. Jhdt. Bis dahin war die euklidische Geometrie als nicht hinterfragbare offensichtliche Wahrheit angesehen worden, der euklidische Raum war das Apriori der Erkenntnisfähigkeit Kants. Er besteht aus drei senkrecht aufeinander stehenden Achsen und entspricht unserem intuitiven Raumverständnis mit den drei unabhängigen Richtungen rechts-links, hinten-vorne, oben-unten. In ihm gilt insbesondere das Geradenaxiom der ebenen euklidischen Geometrie: für jede Gerade lässt sich durch jeden Punkt außerhalb dieser Gerade genau eine (parallele) Gerade legen, die die erste Gerade nicht schneidet. Nicht-euklidische Geometrien zeichnen sich dadurch aus, dass diese Art des Geradenaxioms nicht gilt, es also entweder gar keine oder mehr als eine parallele Gerade durch den Punkt gibt (vgl. Abbildung unten). Jede Wahl eines alternativen Geradenaxioms ergibt eine eigene Geometrie. Die euklidische Geometrie verlor damit ihren Sonderstatus, sie war nicht mehr „gottgegeben“, kein Naturobjekt, sondern nur noch eine von mehreren frei wählbaren Alternativen – und damit Gegenstand menschlicher Konvention. Mathematik schien auf einmal ein willkürliches Spiel mit Axiomen zu sein, deren gemeinsame Forderung innere Konsistenz war, nicht mehr Übereinstimmung mit der Natur ([Liv], Kap. 6).

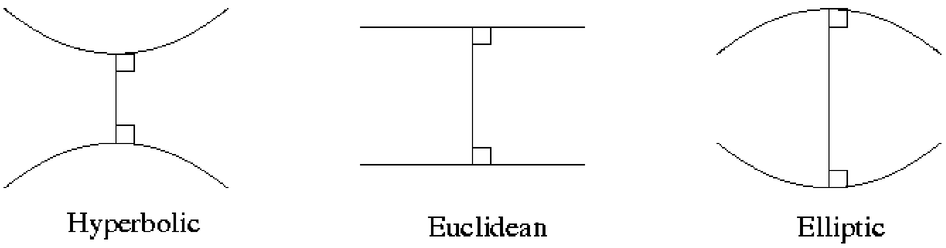

Abbildung 1: "Parallele" Geraden in verschiedenen Geometrien [1]

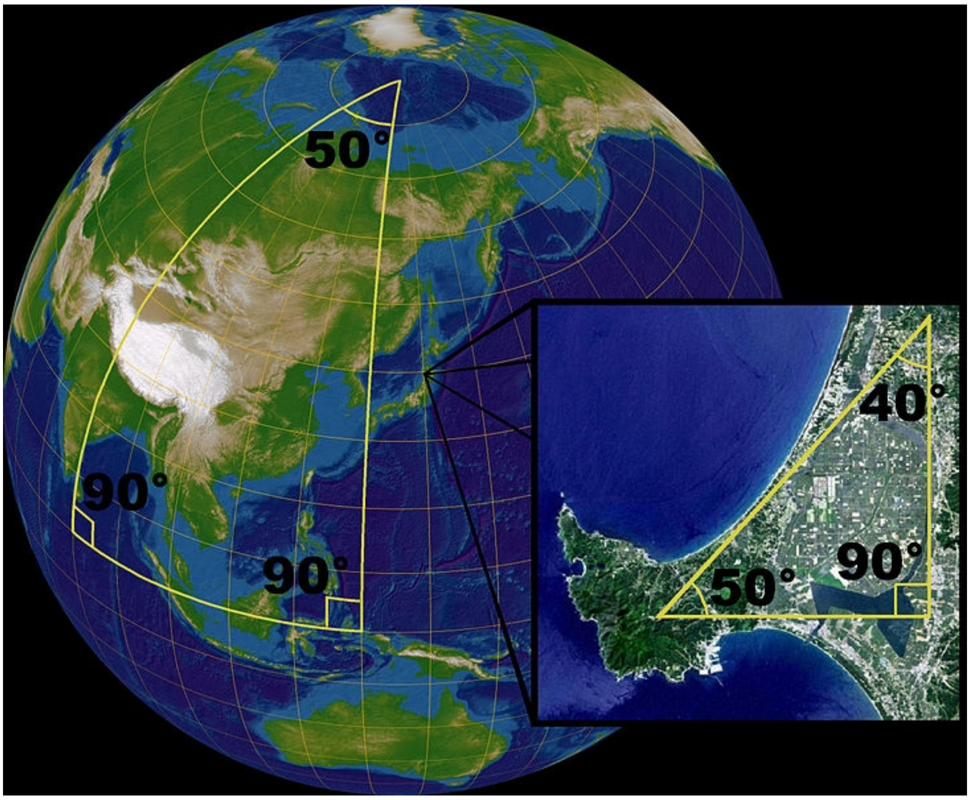

Abbildung 2: Die Winkelsumme eines rechtwinkligen Dreiecks in sphärischer Geometrie ist größer als 180 Grad [2]

1 Graphik von Wikipedia-User Joshuabowman, erstellt unter GNU Free Documentation License

2 Graphik von Wikipedia-User Lars H. Rohwedder, erstellt unter GNU Free Documentation License

Mit der Entdeckung der mathematischen Logik als eigene Disziplin kam bei den Formalisten (Mathematik ist erfunden) die Hoffnung auf, der ganze bunte Zoo an mathematischen Theorien ließe sich wenigstens auf ein gemeinsames logisches Fundament stellen, während die Platoniker die Hoffnung hegten, diese mathematische Logik sei Teil der platonischen Ideenwelt. Nach grundlegenden Arbeiten von Boole und Frege bis Ende des 19. Jahrhunderts fand Russell seine berühmte Antinomie („Die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst als Element enthalten“). Russell und Whitehead entwickelten eine konsistente, aber wenig akzeptierte Mengentheorie, die diese Art Antinomien vermied. Fraenkel und Zermelo fanden eine eingängigere und breiter akzeptierte Alternativformulierung der Mengenlehre, die ebenfalls Antinomie-frei war. Bald wurde klar, dass man das sogenannte Auswahlaxiom und Riemanns Kontinuumshypothese wahlweise zu den Fraenkel-Zermelo-Axiomen hinzufügen kann und jeweils andere Mengenlehren erhält. Da seit Boole bekannt war, dass Mengentheorie und Logik zwei Seiten einer Medaille sind (weil sich die Aussagen der Logik als äquivalente Aussagen über Mengen formulieren lassen), war die Wahlfreiheit der Fraenkel-Zermelo-Theorie ein schwerer Schlag für die Platoniker, weil dadurch die Konstruiertheit von Mathematik durch den Menschen offensichtlich wurde – ganz analog zur Krise nach der Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrie. Kurz darauf bekamen die Platoniker aber wieder den Rücken gestärkt durch Gödels Unvollständigkeitssätze, die zeigten, dass kein endliches Axiomensystem entweder vollständig oder widerspruchsfrei sein könne. Damit war gezeigt, dass Mathematik nicht aus wenigen Axiomen konstruiert werden kann und so vielleicht doch eine platonische Idee jenseits des menschlichen Verstandes ist ([Liv], Kap. 7).

2.3 20. und 21. Jahrhundert

Mit dem großen Neuro-Boom der letzten Jahre haben sich natürlich auch die Neuro-Wissenschaften mit der Frage nach der Herkunft der Mathematik befasst. Neuropsychologen sind eher Formalisten, gemäß ihrem überwiegend monistischen Credo. Viele glauben, mathematische Fähigkeiten parasitierten auf der Sprachfähigkeit. Zahlen seien verankerte Metaphern analog der Begriffsbildung beim Spracherwerb. Danach wäre also z.B. die Zahl 12 die Metapher für das Gemeinsame aller Dinge, die im Dutzend vorkommen.

Livio ([Liv], Kap. 9) vertritt die Ansicht, mathematische Begriffe seien erfunden, die Sätze, die die Beziehungen zwischen den Objekten darstellen, dagegen entdeckt. Als Beispiel führt er den goldenen Schnitt an, der für die Pythagoreer aufgrund ihrer Philosophie so wichtig war, in China dagegen unbekannt war und in der indischen Mathematik nur am Rande erwähnt wurde.

Allen menschlichen Sprachen gemeinsam sind Abstraktion, Verneinung, Unbeschränktheit und Evolutionsfähigkeit – was auch für die Mathematik zutrifft. Chomsky entwickelte das Konzept der Universalgrammatik, einer allen Sprachen gemeinsamen Struktur. Trotzdem gibt es ca. 6500 verschiedene Sprachen. Die Uniformität der Mathematik dagegen kommt evtl. von einer Art „MS-Windows-Effekt“: eine Notation hat sich irgendwann durchgesetzt und aus Kompatibilitätsgründen haben alle sie übernommen. Steven Wolfram beschreibt eine alternative Mathematik auf Basis zellulärer Automaten. Der Astrophysiker Max Tegmark vom MIT geht so weit und sagt, zu jeder möglichen Mathematik gäbe es ein Universum, in der sie gilt.

Wigners Frage nach der Erklärungsmacht der Mathematik, die er in seinem berühmten Essay „The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences“ [Wig] aufwirft, hat zwei Aspekte: einen aktiven und einen passiven. Der aktive zeigt sich, wenn Mathematik z.T. sogar gezielt entwickelt wird, um physikalische Befunde zu erklären oder zumindest zu systematisieren. Prominentestes Beispiel ist wohl die Entwicklung der Infinitesimalrechnung durch Newton zur Formulierung seiner Gravitationstheorie. Der passive Aspekt zeigt sich, wenn unter Umständen sogar schon ältere Theorien auf einmal an völlig unerwarteter Stelle in den Wissenschaften Verwendung finden. Ein Beispiel ist etwa die Knotentheorie, die in der Biologie bei der enzymatischen Entwirrung der DNA und in der Stringtheorie Anwendung findet ([Liv], Kap 8).

Von Einstein stammt das Zitat: "Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit" [Rot], er vertritt also den Platonischen Standpunkt.

Auf Wigners Frage gibt Gross zur Antwort, Mathematik sei realer Bestandteil der natürlichen Welt und ihre Erklärungsmacht daher nicht verwunderlich. Atiyah dagegen sieht Mathematik als evolutionäre Anpassung des menschlichen Verstands. Die Erklärungsmacht außerhalb der Alltagswelt kann das aber nicht erklären. Hamming sieht vier Ansätze 1) Selektionseffekt: wir sehen nur, was uns die mathematische Brille zu sehen erlaubt 2) Evolution der mathematischen Ideen mit Anwendbarkeit / Tauglichkeit als Bewertungskriterium 3) Grenzen der mathematischen Erklärungsmacht: wir lassen uns von der Fülle des mathematisch Erklärbaren blenden, tatsächlich gibt es viel mehr nicht erklärbares, die Erklärungsmacht ist also nur Illusion 4) Evolution des Menschen (vgl. Atiyah).

Livio ([Liv], Kap. 9) argumentiert, dass mathematische Methoden oft gezielt für eine physikalische Theorie erfunden werden (vgl. Newton und die Infinitesimalrechnung). Aber nicht alles ist deterministisch erklärbar. Mathematik hat z.B. bei sozialen Systemen oder im klassischen Chaos ihre Erklärungsgrenze erreicht. In den Grundlagenwissenschaften kommt aus der mathematischen Formulierung oft mehr heraus als man hineingesteckt hat (z.B. Genauigkeit der Newtonschen Gravitationstheorie), nicht jedoch beim probabilistischen oder statistischen Ansatz bei sozialen Systemen oder Chaostheorie ([Liv], Kap. 9).

3 Mathematik auf den verschiedenen Schichten der Wirklichkeit

3.1 Schichten der Wirklichkeit

Dass Natur- und Ingenieurwissenschaften sich der Mathematik als Beschreibungssprache bedienen, gehört zu unserem Alltagswissen und –verständnis und ist insofern wenig überraschend. Damit lassen sich teilweise atemberaubend präzise Vorhersagen des Ausgangs von Experimenten treffen und man kann laufend neue, bis dahin geradezu unvorstellbare technische Geräte bauen – man hat „Berechenbarkeit“ im üblichen Sinne. Dabei wird gerne übersehen, dass den Formeln der Physik und Technik Idealisierungen zugrunde liegen wie reibungsfreie Bewegungen, freier Fall etc., die es in der Praxis nicht gibt. Man kann sich diesen Idealisierungen experimentell lediglich soweit annähern, dass die Formeln für die gerade betrachtete Situation hinreichend gut das reale Verhalten approximieren.

Dass Meteorologie eine Naturwissenschaft ist, ist unumstritten. Wie ist dort „Berechenbarkeit“ zu verstehen? Im Sinne einer präzisen Berechnung – einer Vorhersage? - des Wetters von morgen, übermorgen, in 2 Wochen? Hier zeigt sich ein prinzipielles Problem der Berechenbarkeit, das für sogenannte klassisch-chaotische Systeme charakteristisch ist: die - präzise bekannten! - Bewegungsgesetze sind derart, dass die berechneten Bewegungen extrem empfindlich auf veränderte Anfangsbedingungen reagieren. Eine winzige Abweichung in der Anfangsposition resultiert nach kurzer Zeit in radikal anderem Systemverhalten. Da es prinzipiell unmöglich ist, Anfangsbedingungen exakt festzustellen, ergibt sich bei dieser Art von Systemen bereits nach kurzer Zeit ein effektiv nicht vorhersagbares Verhalten - trotz prinzipiell exakter Berechenbarkeit.

Was soll man sich gar bei sozialen Systemen unter „Berechenbarkeit“ vorstellen? Das exakte Reproduzieren oder sogar Vorhersagen einzelner geschichtlicher Ereignisse? Soweit geht niemand ernsthaft. Gehorchen Gesellschaften oder auch Einzelindividuen überhaupt mathematischen Gesetzmäßigkeiten? Falls ja, welche Art von „Berechenbarkeit“ (man denke etwa an Wahlprognosen) ergibt sich daraus?

Mit dem Fokus auf Berechenbarkeit kann man die Wirklichkeit in vier Bereiche einteilen:

1. Die Mikrophysik mit Objekten auf einer Größenskale weit unterhalb derjenigen unserer Alltagswelt
2. Unsere materielle Alltagswelt mit den vertrauten Objekten wie z.B. Häuser, Steine, ….
3. Die soziale Welt mit dem Verhalten von Einzelindividuen, Gruppen und Gesellschaften, mithin die „geistige“ Welt
4. Die Makrophysik mit Objekten auf einer Größenskale weit oberhalb unserer Alltagswelt

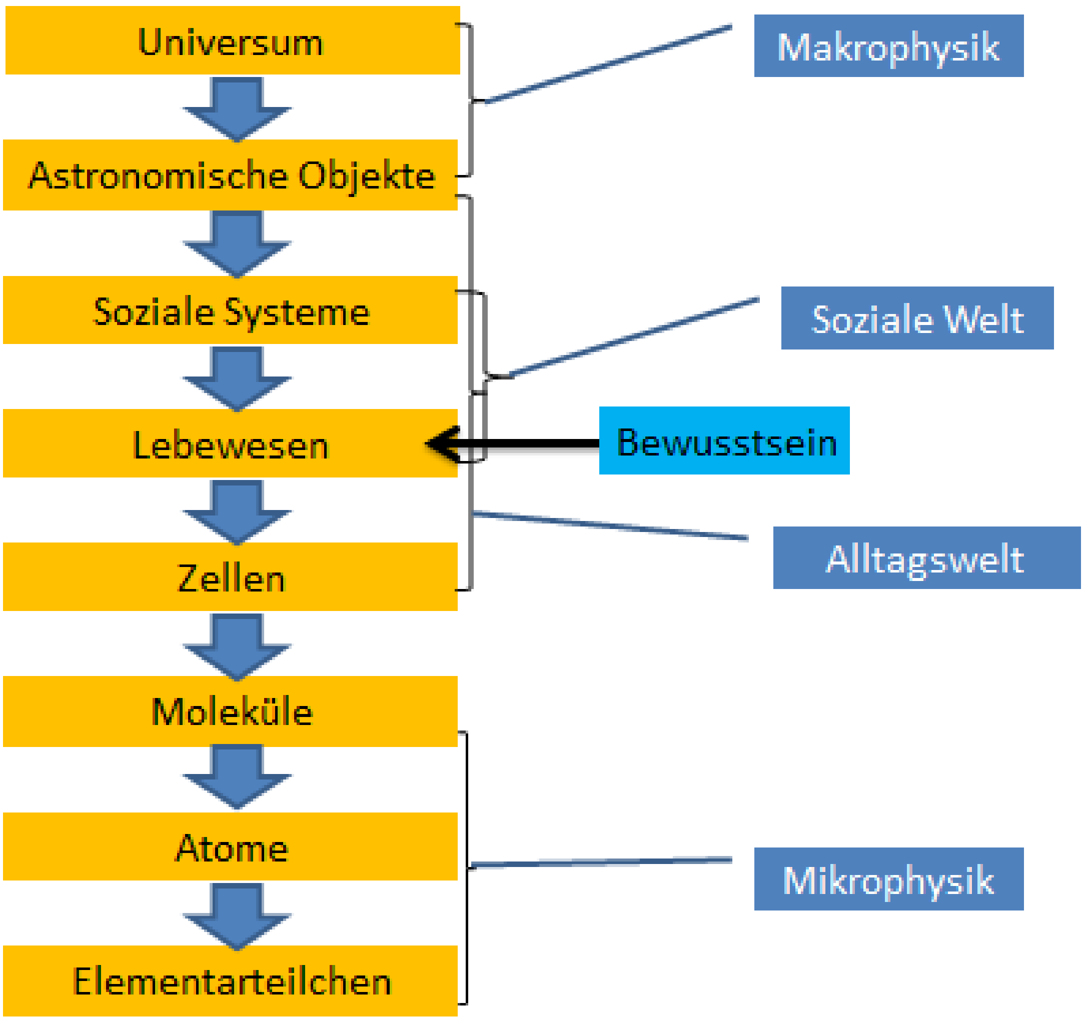

Abbildung 3: Schichten der Wirklichkeit mit Fokus auf Berechenbarkeit

Die sechs unteren Ebenen (ab „Soziale Systeme“) der voranstehenden Abbildung geben die Schichtung der Wirklichkeit nach Oppenheim und Putnam [Opp] wieder, lediglich die beiden oberen Schichten wurden speziell für das vorliegende Thema hinzugefügt.

Auf jeden der vier Bereiche soll im Folgenden kurz eingegangen werden, da jede ganz eigene Besonderheiten und Problemstellungen hat, aber auch überraschende Gemeinsamkeiten zwischen den Ebenen vorhanden sind.

3.2 Die Alltagswelt

3.2.1 Zahlen

3.2.1.1.1 Natürliche Zahlen

Mit Alltagswelt soll der Teil der Welt gemeint sein, mit dem wir jederzeit ganz offensichtlich konfrontiert sind und der insbesondere die Bühne für unsere evolutionäre Entwicklung darstellt. Diese Alltagswelt ist zunächst diskret: es gibt klar voneinander isolierbare Objekte wie Steine, Häuser, Bäume, unsere fünf Finger etc., die man ganz offensichtlich zählen kann. Zählen ist keine auf den Menschen beschränkte Fähigkeit, bereits viele Tierarten haben ein Konzept der Mächtigkeit einer Menge oder können gar konkrete Anzahlen unterscheiden (vgl. [Kli], Kap. 6). Die „natürlichen Zahlen" (0,1,2,3,….) kommen ihrem Namen entsprechend also auf scheinbar ganz „natürliche" Art vor (vgl. das Kronecker-Zitat aus Kap. 1).

In seinem Buch „Wie Naturgesetze Wirklichkeit schaffen" [Gen] skizziert Henning Genz jedoch eine „Wolkenwelt", in der es keine isolierbaren Objekte gibt. Livio ([Liv], Kap. 9) erwähnt ein analoges Gedankenexperiment des Mathematikers Sir Michael Atiyah, der einen in der Tiefsee lebenden Polypen erwähnt, für den es ebenfalls keine isolierbaren Objekte, dafür aber kontinuierliche Wasserströmungen, Temperaturänderungen etc. gibt – mithin nichts diskret zählbares. Dann wären die natürlichen Zahlen aber doch Konstrukte des menschlichen Geistes?! Man kann natürlich fragen, ob sich unter solchen Bedingungen überhaupt Intelligenz entwickeln könnte – aber das ist ein anderes Thema.

Welche evolutionären Anforderungen speziell das Zählen-können mit sich bringt, beschreibt Klix [Kli], Kap. 6. Eine Kernanforderung ist wie bei Sprache und Gestik das Zerlegen komplexer Einheiten – Lautfolgen, Bewegungen oder eben Mengen – in elementare Bestandteile: Phoneme, Einzelgesten, abzählbare Einzelobjekte. Deshalb gibt es Vermutungen, Mathematik und Sprachfähigkeit seien sehr eng miteinander verbunden – Mathematik parasitiere auf der Sprachfähigkeit. Tatsächlich scheint es gewisse universelle Eigenschaften von Sprache zu geben, die sich auch in der Mathematik finden (vgl. Kap 2.3 bzw. [Liv], Kap. 9):

Die Bücher, die die evolutionäre Formung des menschlichen Geistes zum Inhalt haben, sind Legion. In der Literaturliste sind nur wenige mir bekannte aufgeführt ([Dit], [Irr], [Kli], [Lor], [Rie], [Vol]).

3.2.1.2 Rationale und reelle Zahlen

Genauso natürlich kommt man zu den „rationalen Zahlen", also den Zahlen, die sich als Bruch darstellen lassen: 1/2, 9/13, 23/47, …. Eine halbe Frucht kommt genauso natürlich vor wie das Problem, einen Acker unter sieben Erben aufteilen zu müssen. Für die bereits erwähnten Pythagoreer war ein Schlüssel zu ihrem mathematischen Weltverständnis der Umstand, dass bei der Teilung von Musiksaiten nach ganzzahligen Verhältnissen sich die bekannten harmonischen Lautverhältnisse ergaben.

Auf vordergründig genauso „natürliche“ Weise erhält man die reellen Zahlen. Das ist eine Erweiterung der rationalen Zahlen um solche, die sich nicht als Bruch darstellen lassen. Das prominenteste Beispiel einer reellen aber nicht rationalen Zahl ist √2, die Wurzel aus 2. Nach dem Satz des Pythagoras ist √2 die Länge der Diagonale des Einheitsquadrats. Wie schon in der Einleitung erwähnt, entdeckten bereits die Pythagoreer, dass √2 keine rationale Zahl ist. Die reellen Zahlen stopfen quasi die Löcher, die zwischen den rationalen Zahlen noch existieren und stellen ein Kontinuum an Werten dar. Eine mathematisch saubere Konstruktion der reellen Zahlen gelang erst im 19. Jhdt.

Der scheinbar natürlichen Erkenntnis der Irrationalität von √2 liegen jedoch massive Idealisierungen zugrunde, denen kein einziges reales Einheitsquadrat entspricht: Linien werden als breitenlos, Punkte als komplett ausdehnungslos angenommen, außerdem gilt der Satz des Pythagoras nur in einer ebenen Geometrie. Schon für ein flach auf der idealisiert kugelförmigen Oberfläche der Erde aufliegendes rechtwinkliges Dreieck gilt er zum Beispiel schon nicht mehr streng sondern nur noch in einer Näherung, die mit zunehmender Abmessung des Dreiecks immer schlechter wird. Zeichnet man z.B. auf dem Nordpol zwei Linien im 90-Grad-Winkel zueinander, führt sie bis zum Äquator und verbindet dann ihre Schnittpunkte mit dem Äquator miteinander, so hat man ein rechtwinkliges Dreieck, in dem alle drei Seiten gleichlang sind, was ganz offenbar mit dem Satz des Pythagoras nicht vereinbar ist! (Nebenbei verletzt dieses nicht-ebene Dreieck auch den Satz, dass die Summe der Innenwinkel eines beliebigen ebenen Dreiecks immer 180 Grad beträgt – vgl. Abbildung 2).

Existieren die irrationalen Zahlen also irgendwie weniger „natürlich“ als die natürlichen und rationalen Zahlen?

Die reellen Zahlen bilden die Basis der reellen Analysis, deren sich direkt oder indirekt praktisch jede wissenschaftliche Disziplin bedient, insbesondere Physik und Ingenieurswissenschaften.

3.2.1.3 Komplexe Zahlen, Quaternionen und Oktonionen

Aus den reellen Zahlen lassen sich wiederum zwanglos die „komplexen Zahlen“ konstruieren, deren sogenannte „imaginäre Einheit“ i die für reelle Zahlen unmögliche Gleichung i2 = -1 erfüllt. Während die reellen Zahlen also die „1“ als grundlegende Einheit haben, sind es bei den komplexen Zahlen zwei Einheiten: die „1“ und die imaginäre Einheit“ i, sie haben also zwei Dimensionen. Die komplexen Zahlen resultieren in einer „komplexen Analysis“, die mathematische Aussagen von beeindruckender Eleganz und Allgemeinheit erlaubt.

Die komplexe Analysis ist aber nicht nur eine esoterische mathematische Konstruktion, sie eignet sich z.B. hervorragend dazu, Wechselstrom zu beschreiben – das, was, naiv gesprochen, aus jeder Steckdose kommt. Generell werden die Sätze der reellen und komplexen Analysis zur Erklärung und Berechnung zahlloser physikalischer Effekte und technischer Konstruktionen überaus erfolgreich angewendet. Ihnen ganz wesentlich zugrunde liegt aber die Kontinuumseigenschaft der reellen Zahlen – also, dass die reelle Zahlengerade keine „Löcher“ aufweist.

Den reellen und komplexen Zahlen gemeinsam ist, dass man mit ihnen die vertrauten Rechenoperationen Addition / Subtraktion und Multiplikation / Division ausführen kann. Wenn man nun nach weiteren Zahlensystemen sucht, in denen diese beiden Paare von Operationen möglich sind, so findet man nur zwei weitere: die sogenannten „Quaternionen“ und die „Oktonionen“. Die reellen Zahlen haben die Dimension 1, die komplexen Zahlen die Dimension 2 (wie oben kurz beschrieben). Quaternionen und Oktonionen haben die Dimensionen 4 und 8. Mit Quaternionen kann man Drehungen im dreidimensionalen Raum beschreiben: man braucht drei Dimensionen, um die räumliche Lage der Drehachse zu beschreiben und eine Dimension für die Größe des Drehwinkels. Oktonionen tauchen in der String-Theorie auf – darauf soll im Abschnitt über Anthropische Prinzipien kurz eingegangen werden.

3.2.2 Analysis und Körnigkeit der Welt

Eine der klassischen Disziplinen der Physik ist die Thermodynamik, mit der z.B. die geradezu technisch-archetypische Dampfmaschine erklärt werden kann. Sie arbeitet mit erhitztem Dampf und dieser wird als materielles Kontinuum angenommen. Nach dieser Annahme kann man Dampf immer kleiner unterteilen, ohne dabei an eine Grenze zu stoßen.

Schon lange kennt man aber aus der Chemie, dass Stoffe in einfachen ganzzahligen Massenverhältnissen miteinander reagieren. Diese Beobachtungen stellen einen der Grundpfeiler der Atomhypothese dar: die Welt besteht aus einzelnen Atomen und die uns vertrauten Feststoffe, Gase und Flüssigkeiten sind Verbindungen der Atome, die sich in charakteristischen und festen Zahlenverhältnissen aneinander heften. Die wohl berühmteste chemische Formel H2O für Wasser drückt genau dies aus: zwei Atome Wasserstoff (H) und ein Atom Sauerstoff (O) bilden ein Molekül Wasser. Da ein Sauerstoffatom etwa 16 mal soviel wiegt wie ein Wasserstoffatom, braucht man also 16 Gramm Sauerstoff und 2 Gramm Wasserstoff, um daraus 18 Gramm Wasser zu erhalten – immer und überall in diesem genau festgelegten Massenverhältnis.

Auf einer der Alltagserfahrung durchaus noch zugänglichen Ebene chemischer Reaktionen zeigt sich also eine „Körnigkeit“ der Welt. Trotzdem kann diese „körnige“ Welt durch eine Mathematik beschrieben werden, die auf der Kontinuumseigenschaft der reellen Zahlen basiert. Auf der Alltagsskala funktioniert das natürlich deshalb so gut, weil die Atome so winzig sind, dass ihre Diskretheit sich nicht bemerkbar macht und z.B. das Wasser in einer Tasse sehr gut als eine kontinuierliche Massenansammlung und nicht als Haufen diskreter Atome betrachtet werden kann. Nun sind natürlich Atome keine kleinen festen Kugeln. Sie werden durch die Quantenmechanik beschrieben, worauf im nächsten Abschnitt eingegangen wird.

In der Alltagswelt hat die kontinuierliche Mathematik also extreme Wirksamkeit, obwohl die Natur auf der Ebene der Atomen diskret ist – damit aber auf einer viel kleineren Skala als diejenige der Phänomene, die mit der kontinuierlichen Mathematik beschrieben werden, so dass eine Kontinuumsnäherung eine fast beliebig gute Approximation darstellt.

3.3 Mikro- und Makrophysik

Die Mikrophysik beschäftigt sich mit den Objekten auf Größenskalen unterhalb denen der Alltagswelt. Das sind insbesondere Moleküle, Atome und ihre Bestandteile, also die verschiedenen Elementarteilchen. Die grundlegende Theorie der Mikrophysik ist die Quantenmechanik.

Mit Makrophysik hingegen soll der Teil der Physik verstanden werden, der sich mit Objekten auf Größenskalen oberhalb denen unserer Alltagswelt beschäftigt. Das sind im Wesentlichen die Objekte der Astronomie und Kosmologie, also z.B. Sterne, Galaxien, Schwarze Löcher und das Universum als Ganzes.

Beiden Ebenen ist gemeinsam, dass sie in unserer Evolution in dem Sinn keine Rolle gespielt haben, als dass sie keine differenzierenden Selektionskriterien geliefert haben. Kein Individuum hätte eine höhere Überlebenswahrscheinlichkeit gehabt, hätte es die Gravitationswellen umeinander kreisender Neutronensterne wahrnehmen können. Umso verwunderlicher ist es, dass diese beiden Ebenen doch sehr weitgehend vom menschlichen Verstand erfasst werden können, obwohl dieser Verstand evolutionär auf einer dazwischen liegenden Ebene geformt wurde, die nur sehr indirekt und nicht selektiv wirksam davon beeinflusst wurde. Und das Mittel zur Erlangung dieses Verständnisses ist die Mathematik. Wie ist das möglich? Zufall? Oder funktioniert die Natur auch außerhalb unseres direkten Erkenntnisbereichs strikt nach mathematischen Gesetzen? Gibt es vielleicht Bereiche der Natur, die nicht-mathematischen Gesetzen gehorchen, wir sie gerade deshalb aber nicht erkennen können, weil unser Erkenntnisapparat „mathematisch geeicht“ ist? (vgl. die bereits im vorigen Abschnitt aufgeführte Literatur zur evolutionären Ausformung unseres Geistes). Andererseits: ist Mathematik nicht schlechthin Synonym für Gesetzmäßigkeit, ohne Gesetzmäßigkeit gäbe es aber kein Leben, das in seinem hoch-geordneten Funktionieren auf Gesetze angewiesen ist?

Ein erstaunlicher Umstand ist, dass sowohl aus der Mikro- wie aus der Makrophysik Hinweise auf eine „Körnigkeit“ der Welt kommen. In der Mikrophysik ist es die Quantenmechanik. Vordergründig könnte man hier z.B. an die Diskretheit der Energieniveaus von Atomen denken. Tatsächlich argumentiert aber Tong [Ton] gegen eine Diskretheit der Wirklichkeit und führt als Argument an, dass die Ganzzahligkeit der Quantenmechanik eine emergente Eigenschaft der untersuchten Systeme ist (vgl. kontinuierliche Energiebänder in Festkörpern oder die ebenfalls kontinuierliche freie Bewegung).

Für eine Diskretheit der Wirklichkeit sprechen dagegen die wahrscheinlichkeits-theoretischen Interpretationen der Quantenmechanik [Bae][Ze1][Ze2]: ihre „Grundeinheit“ ist das Bit – und Bits kann man zählen, sie sind diskrete Einheiten. Problem hierbei ist natürlich die unklare Korrespondenz zwischen Information und (materieller?) Wirklichkeit – übrigens eine der „really big questions“ von John Archibald Wheeler, dem Schöpfer des Begriffs „Schwarzes Loch“ (vgl. Wikipedia-Artikel „John Archibald Wheeler“). Eine Gegenposition in Form der bekannten und vieldiskutierten Viele-Welten-Interpretation vertritt etwa Zeh [Zeh].

Auf eine mögliche Körnigkeit der Welt stößt man aber auch beim Versuch, die Schwerkraft als Quantentheorie zu formulieren. Neben der Stringtheorie ist nach allgemeinem Dafürhalten die Schleifen-Quantengravitation der aussichtsreichste Kandidat und dort hat man tatsächlich schon auf mathematischer Ebene eine diskrete Struktur von Raum und Zeit [Boj][Smo]. Mittlerweile wird sogar über Experimente nachgedacht, diese Aussagen zu überprüfen.

3.4 Einschub: Anthropische Prinzipien

Der Raum, in dem wir leben, hat die uns vertrauten drei Dimensionen. Nimmt man die Zeit hinzu, so hat unsere Raum-Zeit, wie sie von der Speziellen und Allgemeinen Relativitätstheorie betrachtet wird, eine vierdimensionale Struktur. Gibt es einen Grund dafür? Warum sind es gerade VIER Dimensionen, die unsere Welt ausmachen, und nicht drei oder fünf?

Tatsächlich ist es so, dass nur genau in unserer vierdimensionalen Raum-Zeit physikalische Eigenschaften gelten, die gemeinhin als unverzichtbar für die Existenz von Leben angesehen werden [Bre][Lin]:

- Stabilität der Materie: die Heisenbergsche Unschärferelation sorgt zusammen mit dem Pauli-Prinzip (Verbot für Elektronen, im Atom gleiche Zustände zu besetzen) für die Stabilität des Wasserstoffatoms und für die Struktur des Periodensystems der Elemente. Dies hängt aber davon ab, dass der Raum drei Dimensionen hat, in mehr oder weniger Dimensionen bricht der mathematische Stabilitätsbeweis in sich zusammen
- Gravitationsgesetz: nur in drei Raumdimensionen hat die Schwerkraft ihr charakteristisches Verhalten, mit dem Quadrat der Entfernung abzunehmen (das beruht letztlich darauf, dass die Oberfläche eine Kugel in drei Dimensionen nach der Formel F = 4 π r2 zunimmt). Von diesem invers-quadratischen Gesetz hängt aber die Existenz stabiler Planetenbahnen ab, d.h. in mehr oder weniger als drei Raumdimensionen könnten sich keine dauerhaft stabilen Bahnen von Planeten oder Monden ausbilden
- Stabilität des quantenmechanischen Vakuumzustands: es muss eine stabilen „Vakuumzustand“ mit geringstmöglicher Energie geben, quasi als Fundament, auf dem die Welt aufsetzt. Ohne einen solchen stabilen Vakuum- oder Grundzustand würden Elementarteilchen in immer tiefere Energieniveaus fallen, es wären keine stabilen Strukturen möglich. Die Existenz eines solchen Grundzustands ist jedoch nur in vier Dimensionen möglich
- Existenz von Wellengleichungen: Auf der besonderen Struktur unserer Raum-Zeit, in deren Abstandsmessung die Zeit mit einem umgekehrten Vorzeichen wie der Raum eingeht, beruht die Existenz von elektromagnetischen Wellen, insbesondere also von Licht

Wenn man die Frage weiter verfolgt, welche speziellen physikalischen Gesetze für unsere Existenz gelten müssen, kommt man sehr schnell zu den „Anthropischen Prinzipien“, von denen es mehrere verschiedene Ausprägungen gibt [Bre]. „Starke“ Anthropische Prinzipien besagen, das Universum sei – von wem oder warum auch immer – genau so angelegt wie es ist, um dadurch Leben hervorbringen zu können. Sie enthalten also eine teleologische Komponente.

Die für mich vernünftigste Form stellt das **Schwache Anthropische Prinzip** dar, das zunächst wie eine reine Banalität klingt:

- *Weil es in diesem Universum Beobachter gibt, muss das Universum Eigenschaften besitzen, die die Existenz dieser Beobachter zulassen.*

Es ist gerade kein teleologisches Erklärungsprinzip. Seinen Wert hat es als Leitfaden naturwissenschaftlicher Forschung, an dem Fragestellungen ausgerichtet werden können.

Aber es gibt nicht nur physikalische Effekte, die spezifisch für unsere vier Raum-Zeit-Dimensionen sind. Auch manche mathematischen Aussagen gelten nur in vier Dimensionen. Die wohl prägnanteste ist der Satz von Freedman (1982) und Donaldson (1983), der besagt: „Es gibt ein Kontinuum von nicht diffeomorphen differenzierbaren Strukturen auf R4 (d.h. überabzählbar viele!), aber für Rn (n ungleich 4) gibt es genau eine!“. Anschaulich gesprochen besagt das, dass alle hypothetischen Raum-Zeit-Strukturen mit weniger und mit mehr als vier Dimensionen in einem gewissen Sinne gleich sind. Mit etwas anderem Fokus kann man auch sagen: in weniger als vier Dimensionen ist nicht genug Platz für mathematische Katastrophen in Form von z.B. Singularitäten, während in mehr als vier Dimensionen wiederum soviel Platz ist, dass die Katastrophen behoben werden können. Diese Aussage ist hochgradig singulär, da aus der unendlichen Menge der Raum-Zeit-Dimensionen genau eine – nämlich die unserer Raum-Zeit – sich mathematisch auf geradezu unvorstellbare Weise anders verhält als alle anderen. Ist das Zufall? Oder verbirgt sich dahinter möglicherweise eine tiefliegende und uns noch komplett unbekannte Gesetzmäßigkeit? Hierzu kann man momentan aber nur wild spekulieren.

Ein weiteres Beispiel liefert die Stringtheorie, von der es verschiedene Ausprägungen gibt, die in 10 oder 11 Dimensionen „leben“. Darin werden 2 bzw. 3 Dimensionen für die Zeit und interne Eigenschaften der Strings benötigt, es bleiben zunächst 8 Raumdimensionen übrig. Und diese 8 Raumdimensionen können dort gerade durch die bereits erwähnten Oktonionen beschrieben werden. Ist das wieder Zufall oder aber eine verborgene Zwangsläufigkeit? Wiederum kann hierüber nur wild spekuliert werden, zumal die Stringtheorie alles andere als gesicherte physikalische Theorie ist und von vielen noch nicht einmal als wissenschaftliche Theorie anerkannt wird, weil es momentan noch keine Möglichkeit gibt, sie zu falsifizieren.

Ist also die Existenz von mathematischen Gesetzen, die in höchstem Maße spezifisch für unsere Welt sind, ein Hinweis darauf, dass Mathematik in dieser Welt existiert und von uns entdeckt wird? Oder ist das alles nur Zufall? Zur Zeit können wir nur spekulieren.

3.5 Soziale Systeme

Wie schon in Kapitel 2 erwähnt, lassen sich statistische Methoden sehr wohl auf soziale Systeme anwenden. Ihre Aussagen haben aber einen ganz anderen Charakter als die Aussagen der „exakten“ Methoden der Physik. Diese erlauben präzise Voraussagen für jeden Einzelfall und gestatten auch, überprüfbare (im Sinne Poppers experimentell falsifizierbare) neue Strukturen und Effekte zu postulieren. Die statistischen Aussagen der Mathematik in Bezug auf soziale Systeme (z.B. Wahlprognosen) liefern keine neuen strukturellen Erkenntnisse sondern sagen maximal etwas über die Reichweite der zuvor bereits bekannten Gesetzmäßigkeiten aus (eine Wahlprognose aufgrund von in Deutschland erhobenen Daten kann nicht in Österreich verwendet werden).

Eine abstrakte Beschreibung der Dynamik sozialer Systeme kann mit den Begriffen aus der Theorie selbstorganisierender Systeme vorgenommen werden. Ein System generiert sich seine Randbedingungen fortlaufend selbst (Charakteristikum eines selbstorganisierenden Systems, vgl. [Jan]). Die Entwicklung einer Gesellschaft im Jahr 2014 beruht auf ihrem Zustand am Ende des Jahres 2013 – der gesellschaftliche Zustand am 31.12. 2013 ist also die Randbedingung für die Entwicklung im Jahr 2014. Gesellschaften wie auch Individuen unterliegen unzähligen Randbedingungen. Tatsächliches Systemverhalten ergibt sich immer aus dem Zusammenspiel von allgemeinem Gesetz und spezifischer Rand- bzw. Anfangsbedingung.

3.6 Eine Weltformel!?

Immer wieder hört man den Begriff der „Weltformel“ oder der „Theory of Everything“ (ToE) als ultimates Ziel der Physik bzw. generell der Wissenschaften. Sie soll alle Erscheinungen zumindest der physikalischen Welt einheitlich erklären können. Man denkt dabei unweigerlich an eine Ansammlung von schwer verständlichen Zeichen – eben an eine komplizierte Formel, wie sie z.B. die sogenannte „Wirkung“ des Standardmodells der Elementarteilchentheorie darstellt (s. Abb. 4), die immerhin drei der vier Grundkräfte in gewisser Weise einheitlich darzustellen vermag.

Generell stellen physikalische Formeln extreme Erkenntnis-Verdichtungen dar, da sie in sehr knapper Form notiert werden können (das Standardmodell ist hier eher eine Ausnahme wegen seiner vielen Formel-Bestandteile) und durch Anwendung einiger wohl definierter Rechenregeln die Ergebnisse beliebiger Experimente festlegen.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & -\tfrac{1}{4}F^{\mu\nu b}F^{b}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}W^{\mu\nu a}W^{a}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} \\
& + m_W^2\left(1+\tfrac{\rho}{v}\right)^2 W^{+}_{\mu}W^{-\mu} + \tfrac{1}{2}m_Z^2\left(1+\tfrac{\rho}{v}\right)^2 Z_\mu Z^\mu \\
& + \sum\nolimits_l \left\{\overline{\nu}_{lL}\left[i\gamma^\mu\partial_\mu\right]\nu_{lL} + \overline{l}\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - m_l\left(1+\tfrac{\rho}{v}\right)\right]l\right\} \\
& + \sum\nolimits_q \overline{q}\left\{i\gamma^\mu(\partial_\mu + ig_s F^a_\mu T^a_s) - m_q\left(1+\tfrac{\rho}{v}\right)\right\}q \\
& + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\rho) - \tfrac{1}{2}m_\rho^2\rho^2\left[1+\tfrac{\rho}{v}+\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{\rho}{v}\right)^2\right] \\
& - eA_\mu J^\mu_{em} \\
& - \tfrac{1}{\cos\theta_W\sin\theta_W}Z_\mu J^\mu_{NC} \\
& - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{1}{\sin\theta_W}\left\{W^+_\mu J^\mu_{CC} + W^-_\mu J^{\dagger\mu}_{CC}\right\}
\end{aligned}
$$

Abbildung 4: "Wirkung" des Standardmodells der Elementarteilchentheorie

Aber kann es überhaupt eine echte „Weltformel“ geben? Laughlin [Lau] argumentiert dagegen und verwendet ganz zentral das Argument der Emergenz von Systemeigenschaften, also einem Verhalten von Systemen auf höherer Ebene, das sich nicht aus den Formeln und Theorien ableiten lässt, die die darunterliegende Ebene beschreiben. Ein Beispiel ist die turbulente Strömung von Wasser, die sich nicht aus der Quantentheorie des Wassermoleküls herleiten lässt.

Einen alternativen Weg zur „Weltformel“, der sich radikal von der klassischen Vorstellung einer mathematischen Formel unterscheidet, beschreibt Küppers [Küp]. Dieser Weg, der in den folgenden Abschnitten beschrieben wird, baut auf der „algorithmischen Komplexitätstheorie“ auf und illustriert die Vorstellung der „Erkenntnis-Verdichtung“ aus informationstheoretischer Sicht.

Es gibt heute für jedes handelsübliche Computer-Betriebssystem Komprimierungsprogramme (z.B. WinZip), die eine Informations-Verdichtung vornehmen. Enthält ein Text z.B. zehn Mal das Wort „Supernova-Explosion“, so kann ein Komprimierungsprogramm das Wort ein einziges Mal abspeichern und sich die zehn Stellen im Text dazu notieren, wo das Wort vorkommt – z.B. als Zahl der Bytes, nach denen das Wort einzufügen ist. Eine Zahl benötigt weniger Speicherplatz als das Wort, so dass sich bei identischem Informationsgehalt die Zahl der abzuspeichernden Bits je nach Text teilweise drastisch reduzieren lässt.

Generell suchen Komprimierungsalgorithmen in Bitmustern (wofür ein Text nur ein Beispiel ist) nach Redundanzen bzw. Gesetzmäßigkeiten. Die komprimierte Version des Bitmusters kann durch Umkehrung des Komprimierungsalgorithmus wieder in das ursprüngliche Bitmuster übersetzt werden – eine komprimierte ZIP-Datei kann auch wieder entpackt werden. Entscheidend dabei ist, dass kein Informationsverlust auftritt. Deshalb ist klar, dass eine verlustfreie Komprimierung nur bis zu einem bestimmten Grad erfolgen kann: wenn alle Redundanzen entfernt, alle Gesetzmäßigkeiten erkannt sind, führt jede weitere Verdichtung zu einem Informationsverlust.

Nun stellt die Summe der Erkenntnisse aller wissenschaftlichen Versuche eine sicherlich gigantische aber endliche Datenmenge dar, die sich in einem Computer in Form sehr vieler Bits ablegen lässt. Was passiert, wenn man darauf Komprimierungsalgorithmen anwendet? Die Datenmenge lässt sich sicherlich drastisch reduzieren – aber irgendwann stößt auch der beste Komprimierungsalgorithmus an seine oben erwähnte Grenze. So wie man eine mathematische Formel und die dazugehörigen Rechenvorschriften als „Weltformel“ interpretieren könnte, so könnte man den optimalen Kompressions-algorithmus und das resultierende Kondensat aller wissenschaftlichen Erkenntnisse gleichsam als „Weltformel“ ansehen.

Die algorithmische Komplexitätstheorie zeigt nun aber, dass es prinzipiell unmöglich ist nachzuweisen, dass ein gegebener Komprimierungsalgorithmus optimal ist, dass es also nicht doch einen anderen Algorithmus gibt, der ein noch kleineres Kondensat liefert. Damit ist zumindest in diesem sehr formalistischen Kontext gezeigt, dass es keine „Weltformel“ geben kann!

4 Resumee

Bis in die frühe Neuzeit hinein stützte der Erfolg der Mathematik in den Naturwissenschaften und die zunehmende Ausdehnung ihres Gültigkeitsbereichs die Ansicht, Mathematik werde entdeckt, sie wohne der Natur inne. Mit der Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrie und der Möglichkeit alternativer Mengentheorien geriet der Platonismus in eine Krise, weil es der menschlichen Entscheidung oblag, welche Mathematik man denn nun betreiben wolle. Durch den Gödelschen Unvollständigkeitssatz wiederum erhielten die Formalisten einen großen Dämpfer, da sich zeigte, dass prinzipiell keine vollständige und widerspruchsfreie Mathematik aus einer endlichen Menge von Axiomen abgeleitet werden kann. Insbesondere in den letzten Jahrzehnten haben Neuropsychologie, Linguistik etc. weiteres Material geliefert, das jedoch nach wie vor keine eindeutige und allgemein akzeptierte Antwort auf die Frage „entdeckt oder erfunden“ erlaubt. Evtl. liegt die Wahrheit in der Mitte: mathematische Begriffe werden erfunden, die Beziehungen zwischen ihnen entdeckt.

Die Alltagswelt ist die Bühne, auf der unser Verstand evolutionär sich entwickelte. Ob entdeckt oder erfunden – die Mathematik muss auf jeden Fall von uns intellektuell erfasst werden. Und obwohl unser „mathematischer“ Intellekt nie zuvor mit Mikro- und Makrophysik zu tun hatte, erweist sich die Mathematik gerade in diesen Bereichen als unverzichtbar und äußerst wirkungsvoll.

5 Literaturverzeichnis

[Bae] von Baeyer, Hans Christian: Das informative Universum, C.H. Beck, München, 2005

[Baz] Baez, John C. Huerta, John: Exotische Zahlen und die Stringtheorie, Spektrum der Wissenschaft, Oktober 2011, S. 54

[Boj] Bojowald, Martin: Zurück vor den Urknall, S.Fischer Verlag, Frankfurt am Main, 2009

[Bre] Breuer, Reinhard: Das anthropische Prinzip. Ullstein-Verlag, Frankfurt, 1984

[Dit] Ditfurth, Hoimar von: Der Geist fiel nicht vom Himmel, Hoffmann und Campe, Hamburg 1976

[Gen] Genz, Henning: Wie die Naturgesetze Wirklichkeit schaffen, Rowohlt Verlag, Reinbek bei Hamburg, 2004

[Heu] Heuser, Harro: Lehrbuch der Analysis, Teil 1. B.G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1986

[Irr] Irrgang, Bernhard: Lehrbuch der Evolutionären Erkenntnistheorie, Reinhardt, München 2001

[Jan] Jantsch, Erich: Die Selbstorganisation des Universums. dtv, München, 1984

[Kli] Klix: Erwachendes Denken, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1993

[Küp] Küppers, Bernd-Olaf: Die Berechenbarkeit der Welt. S. Hirzel Verlag, Stuttgart, 2012

[Lau] Laughlin, Robert B.: Abschied von der Weltformel. Piper Verlag, München, 2007

[Lin] Linde, Andrei: Elementarteilchen und inflationärer Kosmos. Springer, Heidelberg, 1993

[Liv] Livio, Mario: Ist Gott ein Mathematiker? dtv, München, 2014

[Lor] Lorenz, Konrad: Die Rückseite des Spiegels, Piper, München 1973

[Opp] Oppenheim, Paul; Putnam, Hilary: The Unity of Science as a Working Hypothesis. In: Minnesota Studies in the Philosophy of Science. 1958.

[Pen] Penrose, Roger: Computerdenken. Spektrum Akademischer Verlag, 1991

[Rie] Riedl, Rupert: Biologie der Erkenntnis, Paul Parey, Berlin/Hamburg 1980

[Rot] Rothman, Tony: Die Physik – ein baufälliger Turm von Babel. Spektrum der Wissenschaft, Februar 2012, S. 61

[Smo] Smolin, Lee: Three Roads to Quantum Gravity, Basic Books, New York, 2001

[Ton] Tong, David: Machen Quanten Sprünge? Spektrum der Wissenschaft, April 2014, S. 58

[Vol] Vollmer, Gerhard: Evolutionäre Erkenntnistheorie. Stuttgart 1975, 8. Aufl. 2002

[Wig] Wigner, Eugene P.: The Unresonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. Commun. Pure Appl. Math., Vol. 13, No I, 1960 https://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Wigner.html

[Zeh] Zeh, H.D.: http://www.zeh-hd.de/VieleWelten.pdf

[Ze1] Zeilinger, Anton: Einsteins Schleier. Die neue Welt der Quantenphysik. C.H. Beck Verlag, München, 2003

[Ze2] Zeilinger, Anton: On the Interpretation and Philosophical Foundation of Quantum Mechanics http://www.quantum.univie.ac.at/zeilinger/philosoph.html

6 Dokumentinformation

Titel:	Ist Gott ein Mathematiker?
	oder
	Die Berechenbarkeit der Welt
Autor:	Dr. Martin Hensel
Datum:	18. Juni 2014 und 9. Juli 2014

Dieses Dokument ist verfügbar auf der Website der Idsteiner Mittwochsgesellschaft

www.idsteiner-mittwochsgesellschaft.de/download.htm

6.1 Urheberrecht

7 Die Idsteiner Mittwochsgesellschaft

Hervorgegangen aus einem "Gesprächskreis Philosophie" der Volkshochschule um das Jahr 2000, bei dem über mehrere Semester philosophische Themen und Strömungen intensiv behandelt wurden, sieht sich die Idsteiner Mittwochsgesellschaft als "Forum für seriöse Befassung mit geistiger Kost". In wechselnder Zusammensetzung finden sich wöchentlich zehn bis zwölf Damen und Herren aus einem Kreis von etwa 20 Mitgliedern zusammen, um ein vorher festgesetztes Thema zu diskutieren. Ein Referent (meistens aus dem Kreis der Teilnehmer, gelegentlich auch ein Gastreferent) trägt ein Thema vor, und die Runde diskutiert anschließend dessen verschiedene Aspekte. Dabei geht es um philosophische Themen oder die philosophische Betrachtung kultureller, naturwissenschaftlicher oder historischer Fragen. Die Themenauswahl ist nicht an religiöse, weltanschauliche oder politische Standpunkte gebunden. Auch während der immer lebhaften Diskussion gibt es keine Tabus, und die Redebeiträge sind so unterschiedlich wie die Standpunkte der Diskutanten.

[Marion Diefenbach, Heinrich Hanke]